

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Matematică

Test 7

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele.

(30 de puncte)

- 5p 1. Rezultatul calculului $10 + 5 \cdot (16 - 2 \cdot 8)$ este egal cu
- 5p 2. Un obiect costă 120 de lei. După o scumpire cu 10%, obiectul costă ... lei.
- 5p 3. Dacă $A = \{1, 2, 3, 4\}$ și $B = \{4, 5, 6, 7\}$, atunci intersecția mulțimilor A și B este egală cu $\{\dots\}$.
- 5p 4. Lungimea unui cerc cu raza de 5 cm este egală cu $\dots\pi$ cm.
- 5p 5. În Figura 1 este reprezentat un cub $ABCD A' B' C' D'$. Unghiul dreptelor AB și $A'D$ are măsura de $\dots^\circ$.

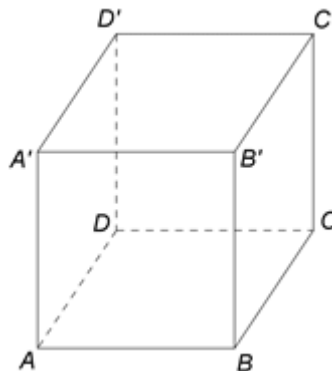


Figura 1

- 5p 6. În tabelul de mai jos este prezentată situația mediilor la limba engleză, pe semestrul I, ale elevilor unei școli gimnaziale.

Media	4	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	1	6	7	14	23	29	30

Conform informațiilor din tabel, probabilitatea ca, alegând un elev din această școală, acesta să aibă media 10 la limba engleză, este egală cu

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p 1. Desenați, pe foaia de examen, un romb $ABCD$.
- 5p 2. Se consideră un număr real nenul x , astfel încât $x + \frac{1}{x} = 2$. Arătați că $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$.
- 5p 3. Anca a citit 375 de pagini dintr-o carte. În fiecare zi, începând cu a doua zi, ea a citit cu 5 pagini mai mult decât în ziua precedentă, și a terminat de citit cele 375 de pagini în 5 zile. Determinați numărul de pagini citite de Anca în prima zi.
4. Se consideră numerele reale $a = \left(\frac{20}{\sqrt{1800}} - \frac{3}{\sqrt{72}} \right) : \frac{1}{84}$ și $b = (\sqrt{3} - 3)^2 - \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{75}$.
- 5p a) Arătați că $a = 7\sqrt{2}$.
- 5p b) Comparați numerele a și b .
- 5p 5. Se consideră expresia $E(x) = (2x - 1)^2 - 3(x - 3)(x + 2) - (x - 2)(x + 1)$, unde x este număr real. Demonstrați că $E(1) + E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + E\left(\frac{1}{2020}\right) = 42420$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. În Figura 2 sunt reprezentate pătratul $ABCD$ cu $AB = 15\text{cm}$ și triunghiurile echilaterale ABM , BCN și ADP .

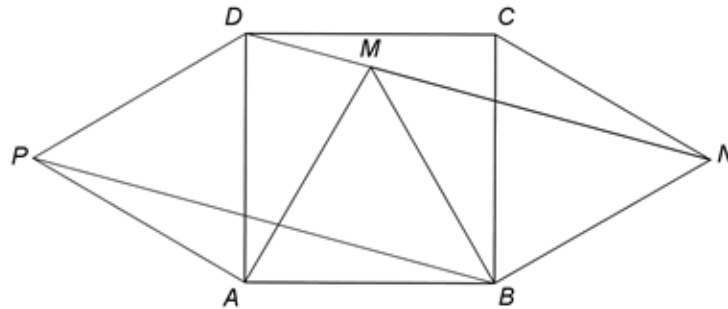


Figura 2

- 5p a) Arătați că perimetrul triunghiului ABM este egal cu 45cm .
5p b) Arătați că lungimea segmentului MN este egală cu $15\sqrt{2}\text{cm}$.
5p c) Demonstrați că patrulaterul $PBMD$ este trapez isoscel.

2. În Figura 3 este reprezentată o piramidă $VABCD$ cu $ABCD$ pătrat și $VO \perp (ABC)$, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD . Triunghiul VAB este echilateral cu $AB = 6\text{cm}$, punctul M este mijlocul muchiei BV și punctul N este mijlocul muchiei CV .

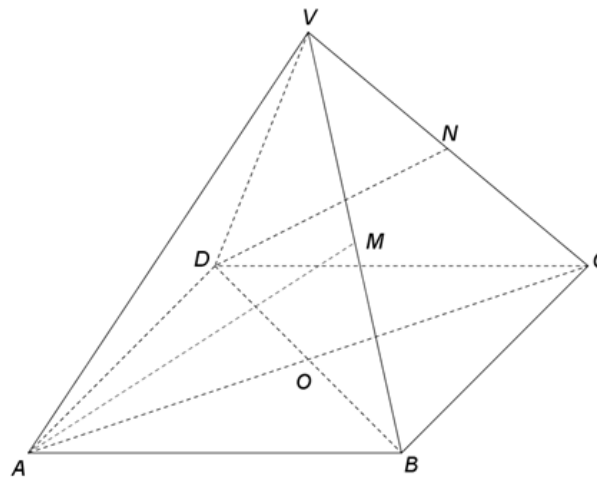


Figura 3

- 5p a) Arătați că aria patrulaterului $ABCD$ este egală cu 36cm^2 .
5p b) Demonstrați că dreptele VB și VD sunt perpendiculare.
5p c) Demonstrați că, dacă dreptele AM și DN se intersectează în punctul P , atunci $VP \parallel (ABC)$.

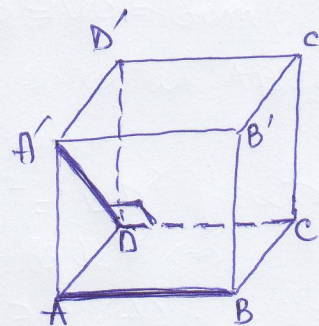
T07 - REZOLVARE

Subiectul I: 1) $10 + 5 \cdot (16 - 2 \cdot 8) = 10 + 5 \cdot (16 - 16) = 10 + 5 \cdot 0 = 10 + 0 = 10$.

2) $100\% + 10\% = 110\%$; $(110\% \text{ din } 120) = \frac{110}{100} \cdot 120 = 11 \cdot 12 = 132$ (1e).

3) $A = \{1; 2; 3; 4\}$; $B = \{4; 5; 6; 7\}$; $A \cap B = \{4\}$.

4)  $P = 2\pi R = 2\pi \cdot 5 = 10\pi$ (cm).



5) $AB \cap A'D$: necoplanare, $DC \parallel AB$, deci $m(\widehat{AB; A'D}) = m(\widehat{DC; A'D}) = m(\widehat{A'DC}) = 90^\circ$.

Intr-adevar: $\left. \begin{array}{l} A'A \perp (ABC) \\ AD \perp DC \end{array} \right\} \xRightarrow{T.3.1} A'D \perp DC$, deci $m(\widehat{A'DC}) = 90^\circ$.

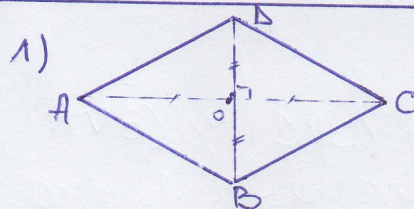
6) $\boxed{\text{probabilitatea} = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}}$

nr. cazuri posibile = nr. elevilor din școală = $1+6+7+14+23+29+30 = 110$

nr. cazuri favorabile = nr. elevilor cu media 10 la lb. engl. = 30.

Deci $p = \frac{30}{110} = \frac{3}{11}$.

SUBIECTUL al II-lea:



2) $(x + \frac{1}{x}) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{x})^2 = 2^2 = 4$. Dar $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + (\frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$

Atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4$, deci $x^2 + \frac{1}{x^2} = 4 - 2 = 2$, g.e.d.

Obs: Știm că $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \right)$ (pt. $a, b \neq 0$). Intr-adevar avem $\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$ (A).

Atunci $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 2 \Leftrightarrow a = b$. In cazul nostru $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$ și atunci $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1^2 + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$, g.e.d.

3.) Notăm cu x nr. paginilor citite în prima zi și avem ecuația:

$x + (x+5) + (x+5+5) + (x+5+5+5) + (x+5+5+5+5) = 375 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + x+5 + x+10 + x+15 + x+20 = 375 \Leftrightarrow 5x = 375 - 50 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x = 325 \Leftrightarrow x = 325 : 5 \Leftrightarrow x = 65$. Deci în prima zi a citit 65 pg.

$$4) a = \left(\frac{20}{\sqrt{1800}} - \frac{3}{\sqrt{72}} \right) : \frac{1}{84} =$$

$$= \left(\frac{20}{30\sqrt{2}} - \frac{3}{6\sqrt{2}} \right) \cdot 84 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \right) \cdot 84 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right) \cdot 84 = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{12} \cdot 84 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 84 = 7\sqrt{2}. \text{ Deci } a = 7\sqrt{2}, \text{ g.e.d.}$$

$$\sqrt{1800} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 100} =$$

$$= 30\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}$$

$$b) b = (\sqrt{3} - 3)^2 - \sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} + \sqrt{75} =$$

$$= 12 - 6\sqrt{3} - (2 - \sqrt{3}) + 5\sqrt{3} =$$

$$= 12 - 6\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 5\sqrt{3} =$$

$$= 10.$$

$$(\sqrt{3} - 3)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} \cdot 3 + 3^2 =$$

$$= 3 - 6\sqrt{3} + 9 = 12 - 6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = |\sqrt{3} - 2| = -(\sqrt{3} - 2) =$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$$

$$a < b \Leftrightarrow 7\sqrt{2} < 10 \quad | \cdot 1^2 \Leftrightarrow 49 \cdot 2 < 100 \Leftrightarrow 98 < 100$$

Deci $a < b$.

$$5) E(x) = (2x - 1)^2 - 3(x - 3)(x + 2) - (x - 2)(x + 1) =$$

$$= 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 3x + 18 - x^2 + x + 2 =$$

$$= 21. \text{ Deci } E(x) = 21, \text{ pentru orice}$$

număr real x .

$$(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$(x - 3)(x + 2) = x^2 - x - 6$$

$$(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$$

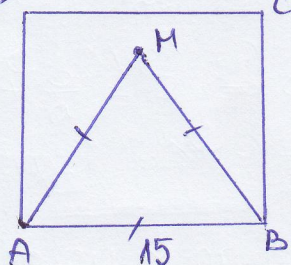
$$\text{Avem } E(1) + E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + E(2020) =$$

$$= \underbrace{21 + 21 + 21 + \dots + 21}_{2020 \text{ termeni}} = 21 \cdot 2020 = 42420,$$

(g.e.d.)

SUBIECTUL al III-lea:

1) a) D



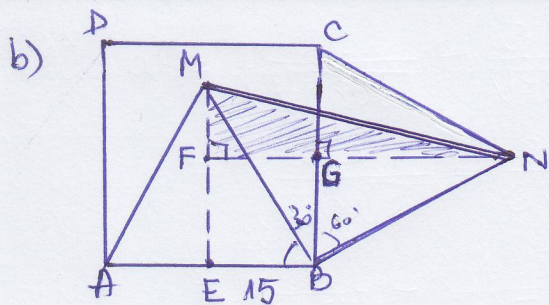
$\triangle ABM$: echilateral,
 $(AB = MA = MB)$
 $AB = 15 \text{ cm}$

$$\Rightarrow P_{\triangle ABM} = AB + MA + MB =$$

$$= 15 + 15 + 15 = 45 (\text{cm})$$

(g.e.d.)

$$\begin{array}{r} 2020, \\ 21 \\ \hline 2020 \\ 4040 \\ \hline 42420 \end{array}$$



Pentru a calcula MN vom duce $ME \perp AB$,
 înălțimea $\triangle MAB$ echilateral și avem atunci
 $ME = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}$ (cm.)

Ducem și $NG \perp BC$, înălțimea $\triangle NBC$ echila-
 teral și o prelungim până când
 $NG \cap ME = \{F\}$.

Deoarece înălțimea într-un triunghi echilateral este și
 mediană, apoi perpendiculara pe una din două drepte paralele
 este perpendiculară și pe cealaltă, (la noi $NG \perp BC \parallel ME \Rightarrow NF \perp ME$)
 perpendiculara pe una din două drepte perpendiculare (în plan)
 este paralelă cu cealaltă (la noi $ME \perp AB \perp BC \Rightarrow ME \parallel BC$).

De aici deducem că $\triangle FMN$: dreptunghic în F și că

$$FM = ME - EF = \frac{15\sqrt{3}}{2} - \frac{15}{2} = \frac{15(\sqrt{3}-1)}{2} \text{ (cm.)}$$

$$FN = FG + GN = \frac{15}{2} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{15(\sqrt{3}+1)}{2} \text{ (cm.)}$$

Cu T. Pitagora în $\triangle FMN$ avem:

$$\begin{aligned} MN^2 &= FM^2 + FN^2 = \left[\frac{15(\sqrt{3}-1)}{2} \right]^2 + \left[\frac{15(\sqrt{3}+1)}{2} \right]^2 = \frac{15^2}{4} (\sqrt{3}-1)^2 + \frac{15^2}{4} (\sqrt{3}+1)^2 \\ &= \frac{15^2}{4} ((\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2) = \frac{15^2}{4} (4 - 2\sqrt{3} + 4 + 2\sqrt{3}) = \frac{15^2}{4} \cdot 8 = 2 \cdot 15^2 \end{aligned}$$

$$\text{Deci } MN = \sqrt{15^2 \cdot 2} = 15\sqrt{2} \text{ (cm.)}$$

$$(\sqrt{3}-1)^2 = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = 4 - 2\sqrt{3}$$

Obs. Mult mai simplu se putea calcula MN dacă observăm
 măsurile unghiurilor care apar, anume:

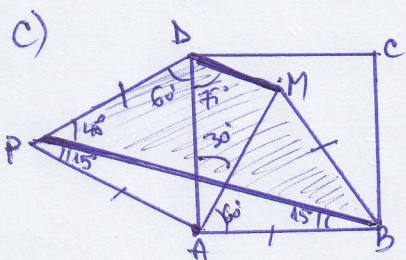
$$\begin{aligned} m(\widehat{ABM}) &= 60^\circ \\ m(\widehat{ABC}) &= 90^\circ \\ m(\widehat{BCN}) &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m(\widehat{MBC}) = 30^\circ \Rightarrow m(\widehat{MBN}) = 90^\circ$$

$$\text{Dar } MB = BN = 15 \text{ cm}$$

$\Rightarrow \triangle BMN$ este
 dr. isoscel,
 iar atunci avem
 $MN = a\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \text{ (cm.)}$

Deci iată cât de mult contează
 să fii inspirat la examen.



Avem $[MB] \equiv [PD]$, deci mai rămâne de arătat că
 $PB \parallel MD$.

$$\triangle APB: \text{isoscel}, m(\widehat{PAB}) = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow m(\widehat{APB}) = m(\widehat{ABP}) = 15^\circ$$

$$\text{Prin urmare } m(\widehat{DPB}) = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

$$\triangle AMD: \text{isoscel } (AM = AD) \Rightarrow m(\widehat{ADM}) = m(\widehat{AMD}) = 75^\circ$$

$$m(\widehat{DAM}) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

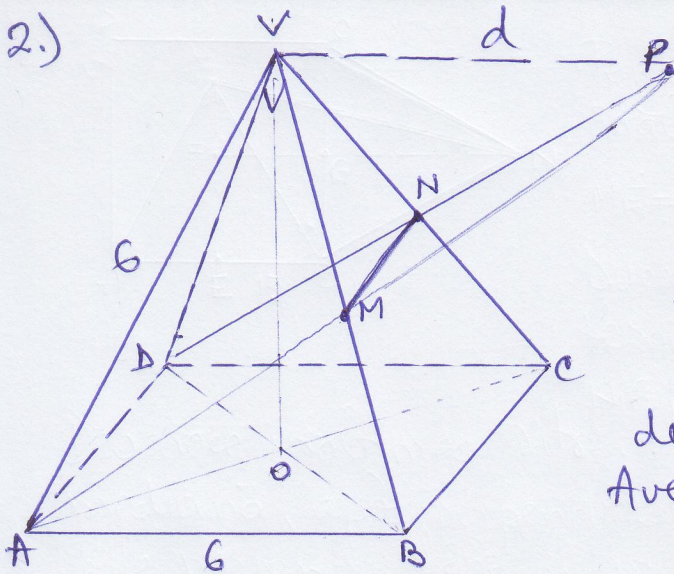
$$\text{Avem } m(\widehat{DPB}) + m(\widehat{PDM}) = 45^\circ + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \widehat{DPB} \text{ și } \widehat{PDM}: \text{suplementare}$$

— " — " — sunt de aceeași parte a secantei PD

$$\Rightarrow PB \parallel DM \text{ (2)}$$

① și ② $\Rightarrow PBMD$: tr. isosc.
 (2 ed.)



$$\text{A}_{ABCD} = a^2 = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ (cm}^2\text{), (g.e.d.)}$$

b) In ΔVBD given $VB = VD = 6 \text{ cm}$

BD e diagonală în patrulaterul ABCD,

deci $BD = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2} \text{ (cm)}$.

Avem atunci $\sqrt{B^2 + VD^2} = BD$ pentru că

$$b^2 + b^2 = (6\sqrt{2})^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36 + 36 = 72 \text{ (A)}.$$

Atunci, conform Reciprocei T. Pitagora, ΔVBD e dreptunghic
 în V , adică $VB \perp VD$ sunt perpendiculare, (q.e.d.)

c) Aici se aplică teorema „a coperișului” (ROOF THEOREM) sau teorema „colibei”:

"Dacă două plane care trec prin două drepte paralele, se intersectează (după o dreaptă), atunci dreapta de intersecție este paralelă cu fiecare din cele două drepte."

În cazul nostru (AVB) și (DVC) sunt cele două plane în cauză. Ele trec prin dreptele paralele AB, respectiv DC și se intersectează în V.

Deci dintr-o familie de drepte care nu sînt paralele, doar două drepte pot fi paralele cu o dreaptă dată. Dacă două drepte sînt paralele cu o dreaptă dată, atunci ele sînt paralele între ele.

Demonstrăm acum că P aparține acelei drepte $d = (A \vee B) \cap (p \vee q)$.

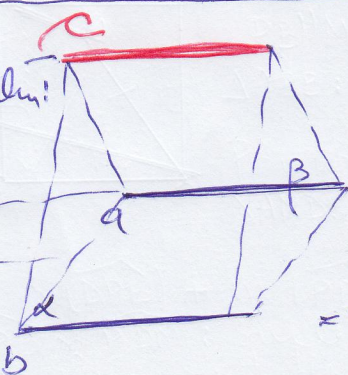
$$\begin{array}{l} P \in AM \subset (A \vee B) \Rightarrow P \in (A \vee B) \\ P \in DN \subset (D \vee C) \Rightarrow P \in (D \vee C) \end{array} \quad \Bigg\} \Rightarrow P \in (A \vee B) \cap (D \vee C) = d.$$

$$P \in DN \subset (DVC) \Rightarrow P \in (DVC)$$

Prin urmare avem $VP = d$, deci $VP \parallel (ABC)$, g.e.d.

OBS:

T. asoprigidum!



For all b

$$\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \beta \end{array}$$

$$\alpha \cap \beta = \kappa$$

١٥٠

$$\vdash \Rightarrow c \parallel a, c \parallel b \text{ (implicit } c \parallel (ab) \text{)}$$

Leu. Red. abund. Presyn. (a cHa $\Rightarrow$)

$$\Rightarrow \text{c.p.a.} = \{M\}; \underline{M \in \alpha, M \in \kappa \Rightarrow M \in \beta} \Rightarrow \underline{M \in \beta} \Rightarrow$$

$$a \neq b$$

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Test 7

- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al II-lea și SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	10	5p
2.	132	5p
3.	4	5p
4.	10	5p
5.	90	5p
6.	$\frac{3}{11}$	5p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.	Desenează rombul Notează rombul $ABCD$	4p 1p
2.	$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4$ $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 4 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 2$	3p 2p
3.	A doua zi Anca citește $n+5$ pagini, a treia zi citește $n+10$ pagini, a patra zi citește $n+15$ pagini, iar a cincea zi citește $n+20$ pagini, unde n este numărul de pagini citite de Anca în prima zi $n + (n+5) + (n+10) + (n+15) + (n+20) = 375 \Rightarrow 5n + 50 = 375$, deci $n = 65$ de pagini	2p 3p
4.	a) $a = \left(\frac{20}{30\sqrt{2}} - \frac{3}{6\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{84}{1} = \left(\frac{2}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{84}{1} = \frac{4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{12} \cdot \frac{84}{1} = 7\sqrt{2}$ b) $b = (3 - 6\sqrt{3} + 9) - \sqrt{3} - 2 + 5\sqrt{3} = 12 - 6\sqrt{3} - 2 + \sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10$ Cum $7\sqrt{2} = \sqrt{98}$ și $10 = \sqrt{100}$, obținem $a < b$	3p 2p 3p 2p
5.	$E(x) = 4x^2 - 4x + 1 - 3(x^2 - x - 6) - (x^2 - x - 2) = 4x^2 - 4x + 1 - 3x^2 + 3x + 18 - x^2 + x + 2 = 21$, pentru orice număr real x $E(1) + E\left(\frac{1}{2}\right) + E\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + E\left(\frac{1}{2020}\right) = \underbrace{21 + 21 + \dots + 21}_{\text{de } 2020 \text{ ori } 21} = 21 \cdot 2020 = 42420$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.	a) $P_{\triangle ABM} = 3AB =$ $= 3 \cdot 15 = 45 \text{ cm}$	3p 2p
----	--	----------

	b) $m(\angle MBC) = m(\angle ABC) - m(\angle ABM) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle MBN) = m(\angle MBC) + m(\angle CBN) = 90^\circ$ $\triangle MBN$ este dreptunghic isoscel, deci $MN = 15\sqrt{2}$ cm	2p 3p
	c) $m(\angle DAM) = 30^\circ$ și, cum $\triangle ADM$ isoscel, $m(\angle ADM) = 75^\circ \Rightarrow m(\angle PDM) = 135^\circ$ $\triangle ABP$ isoscel și $m(\angle BAP) = 150^\circ \Rightarrow m(\angle APB) = 15^\circ$, deci $m(\angle DPB) = 45^\circ$ $\angle PDM$ și $\angle DPB$ sunt suplementare, deci $BP \parallel DM$ și, cum $DP = MB$, obținem că $PBMD$ este trapez isoscel	1p 2p 2p
	2. a) $ABCD$ este pătrat, deci $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 6^2 = 36 \text{ cm}^2$	3p 2p
	b) BD este diagonală în pătratul $ABCD \Rightarrow BD = 6\sqrt{2}$ cm $VO \perp (ABC)$ și $ABCD$ pătrat $\Rightarrow \triangle VOA \equiv \triangle VOB \equiv \triangle VOC \equiv \triangle VOD$, deci $VA = VB = VC = VD$ $VB^2 + VD^2 = 6^2 + 6^2 = (6\sqrt{2})^2 = BD^2 \Rightarrow \triangle BVD$ este dreptunghic în V, deci $VB \perp VD$	2p 1p 2p
	c) MN linie mijlocie în $\triangle VBC \Rightarrow MN \parallel BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$, deci $MN \parallel AD$ și $MN = \frac{AD}{2}$, de unde obținem MN linie mijlocie în $\triangle PAD$ M este mijlocul segmentelor BV și $PA \Rightarrow ABPV$ este paralelogram, deci $VP \parallel AB$ și, cum $AB \subset (ABC)$, obținem $VP \parallel (ABC)$	2p 3p